

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Dipartimento di Tecnica e Gestione dei sistemi Industriali

**Corso di Laurea Triennale in Ingegneria Gestionale
Tesi di Laurea di Primo Livello**

**ANALISI DINAMICA DI UN MANIPOLATORE PARALLELO DI
PURA ROTAZIONE (3-RRR).
DYNAMIC ANALYSIS OF A SPHERICAL PARALLEL
MANIPULATOR (3-RRR).**

RELATORE : ING. GIOVANNI BOSCHETTI

LAUREANDA: VALERIA AMADASI

ANNO ACCADEMICO: 2010/2011

Datemi un punto di appoggio e vi solleverò il mondo
(Archimede)

Indice

Introduzione

1. Robot	
1.1. Generalità	1
1.2. Origine del termine	2
1.3. Ambito industriale	2
2. Manipolatori industriali	
2.1. Introduzione alla robotica industriale	4
2.1.1. Parametri di un manipolatore	5
2.1.2. Indicatori	5
2.2. Manipolatori seriali e paralleli	6
2.2.1. Robot seriali	6
2.2.2. Robot paralleli	7
2.3. Perché preferire manipolatori paralleli	8
2.4. Problemi progettuali	9
3. Manipolatori 3-RRR	
3.1. Struttura dei manipolatori	11
3.1.1. Descrizione dei giunti.....	11
3.1.2. Tipi di end effector	13
3.1.3. Gli attuatori	13
3.2. 3-RRR	14
4. Analisi dinamica	
4.1. Introduzione	17
4.2. Il Modello Dinamico	20
4.2.1. Sistemi di riferimento	20
4.2.2. Energia cinetica	21
4.3. Calcolo della matrice N	23
4.3.1. Procedimento geometrico per il calcolo della matrice H_p	24
4.3.2. Procedimento geometrico per il calcolo delle H_{ij} ...	27
4.3.3. Matrici inerziali	29
4.4. Indici dinamici	
4.4.1. isotropia dinamica (indice 1)	33
4.4.2. swiftness (indici 2 e 3)	35

5. Applicazione degli indici dinamici	37
5.1. Indice 1	37
5.2. Indici 2 e 3	39
Conclusioni	41
Bibliografia	43
Ringraziamenti	46
Appendice	48

Introduzione

Obiettivo di questo elaborato è presentare un modello dinamico per lo studio di un manipolatore parallelo di pura rotazione a 3 GDL, definendo 3 semplici indici di prestazione dinamica ed applicando gli stessi ad un robot del tipo 3-RRR. Lo studio è di notevole interesse perché in questo si tiene conto degli effetti inerziali dovuti alle masse in gioco, che verrebbero trascurate limitandosi ad una analisi cinematica di posizione e di velocità.

Il modello dinamico utilizzato è basato su una formulazione lagrangiana della dinamica e sfrutta la caratteristica che tutti i collegamenti ruotano intorno allo stesso punto fisso. I tre parametri che definiscono l'orientamento della piattaforma sono utilizzate come coordinate generalizzate: questa scelta consente di utilizzare la matrice di inerzia generalizzata (GIM). Può quindi essere risolta sia la dinamica inversa che diretta e possono essere inoltre applicati degli efficaci indici di prestazioni dinamiche.

Con il modello si è dimostrato che le migliori performance sono raggiunte nelle regioni di lavoro in cui il manipolatore ha una buona cinematica e isotropia dinamica.

Dopo un'introduzione al mondo dei robot, nel capitolo 1, e ai manipolatori industriali nel capitolo 2, nel capitolo 3 si descriveranno più nel dettaglio i manipolatori a 3 GDL e in particolar modo il tipo 3-RRR, soggetto di questo elaborato. Nel capitolo 4 si presenterà il modello dinamico e si passerà all'applicazione della stesso al manipolatore in analisi, attraverso l'analisi rigorosa delle velocità e dei tensori di inerzia; inoltre si descriveranno gli indici studiati e in seguito nel capitolo 5 si vedrà l'applicazione di questi grazie all'ausilio del software Matlab. Infine l'appendice riporta il codice MATLAB (versione 7.8.0.347 (R2009a)) di cui ci si avvale per l'elaborazione di calcoli e grafici.

CAPITOLO 1

ROBOT

1.1. Generalità

Un **robot** è un agente artificiale, virtuale o meccanico, che compie determinate azioni , sia in base ad una supervisione diretta dell'uomo, sia autonomamente basandosi su linee guida generali, anche usando processi di intelligenza artificiale, ed è quindi in grado di eseguire compiti da solo; questi compiti tipicamente dovrebbero essere performanti al fine di sostituire o coadiuvare l'uomo, come ad es. nella fabbricazione, costruzione, manipolazione di materiali pesanti e pericolosi, o in ambienti proibitivi o non compatibili con la condizione umana o semplicemente per liberare l'uomo da impegni.

Un robot così definito, dovrebbe essere dotato di connessioni guidate dalla retroazione tra percezione e azione, e non dal controllo umano diretto. L'azione può prendere la forma di motori elettro-magnetici, o attuatori, che muovono un arto, aprono e chiudono una pinza, o fanno deambulare il robot. Il controllo passo-passo e la retroazione sono forniti da un programma che viene eseguito da un computer esterno o interno al robot, o da un micro controller. In base a questa definizione, il concetto di robot può comprendere quasi tutti gli apparati automatizzati. Si possono catalogare i robot in due macro categorie: "autonomi" e "non autonomi". I robot "autonomi" sono i classici robot utilizzati per adempiere a specifici compiti che riescono ad assolvere in maniera più efficace dell'uomo, ad esempio i robot utilizzati nelle fabbriche con l'enorme vantaggio di poter ottenere una produzione più precisa, veloce ed a costi ridotti; i robot utilizzati per lavorare in ambienti ostili (ad esempio su Marte) o con sostanze tossiche sono detti invece "non autonomi" poiché sono guidati da un software deterministico che fa eseguire loro il lavoro in modo ripetitivo oppure sono direttamente pilotati dall'uomo.

1.2. Origine del termine

Il termine robot deriva dal termine ceco robota, che significa "lavoro pesante" o "lavoro forzato". L'introduzione di questo termine si deve allo scrittore ceco Karel Čapek, il quale usò per la prima volta il termine nel 1920 nel suo dramma teatrale I robot universali di Rossum. Il termine "robotica" venne usato per la prima volta su carta stampata nel racconto di Isaac Asimov intitolato "Bugiardo!" (Liar!, 1941), presente nella sua famosa raccolta Io, Robot. In esso, egli citava quelle che in seguito divennero le Tre leggi della robotica (poi accresciute a quattro con l'introduzione della Legge Zero).

Il primo progetto documentato di un robot umanoide venne fatto da Leonardo da Vinci attorno al 1495. Degli appunti di Da Vinci, riscoperti negli anni cinquanta, contengono disegni dettagliati per un cavaliere meccanico, apparentemente in grado di alzarsi in piedi, agitare le braccia e muovere testa e mascella. Il progetto era probabilmente basato sulle sue ricerche anatomiche registrate nell'Uomo vitruviano.

Il primo robot funzionante conosciuto venne creato nel 1738 da Jacques de Vaucanson, che fabbricò un androide che suonava il flauto, così come un'anatra meccanica.

1.3. Ambito industriale

La robotica industriale come viene ora intesa muove i suoi primi passi nell'immediato dopoguerra.

Nel 1946 l'americano G.C. Devol sviluppa un dispositivo che permette di registrare magneticamente dei segnali elettrici che possono essere successivamente inviati ad un dispositivo elettromeccanico per comandarlo opportunamente. Questa apparecchiatura verrà brevettata nel 1952.

Nel 1960, in base al brevetto di Devol, la Unimation (UNiversal AutoMATION) produce il "primo robot" denominato UNIMATE, esso viene installato con successo nel 1961, in una linea di produzione della General Motors con funzioni di asservimento ad una macchina per la pressocolata. Nel 1968 lo SRI (Standard Research Institute) produce

un prototipo di robot chiamato 3 Shakey montato su ruote ed equipaggiato con vari sensori tra cui una telecamera ed alcuni sensori di contatto.

La comparsa dei primi robot industriali avviene intorno agli anni settanta. Sono strutture di acciaio con motori idraulici, lenti ed imprecisi. I gradi di libertà e le capacità di carico di questi primi robot sono limitate; le prime applicazioni industriali sono nel campo automobilistico, infatti i robot vengono dotati di pinze di saldatura per saldare ed assemblare le scocche delle automobili.

Il primo esempio di impiego massiccio in Italia e in Fiat, dove vengono usati diversi robot per la saldatura sulle vetture con il Robogate, un'invenzione italiana adottata, in seguito, da tutte le industrie automobilistiche.

Un'altra applicazione sui veicoli è relativa alle operazioni di verniciatura che, almeno per i particolari, avviene grazie all'impiego di braccia automatizzate.

Nel 1979 viene sviluppato presso l'università di Yamanashi in Giappone il primo robot SCARA (Selective Compliance Assembly Robot Arm). A partire da questo periodo lo sviluppo è stato molto rapido ed ha interessato svariati settori produttivi cosicché risulta difficile individuare cronologicamente le tappe più significative.

I robot, negli ultimi anni, si sono evoluti e sono diventati antropomorfi, aumentando sempre di più gradi di libertà, la precisione, la velocità e la capacità di carico. Adesso i robot svolgono in campo industriale lavorazioni accurate come forature, smerigliature, fresature, verniciature, smaltature e tagli con il laser e sono dotati di sistemi di visione molto precisi.

CAPITOLO 2

MANIPOLATORI INDUSTRIALI

2.1. Introduzione alla robotica industriale

Un manipolatore è una struttura meccanica articolata che ha lo scopo di muovere in modo opportuno la parte operativa del robot, ovvero una piattaforma detta end-effector. Tipicamente quest'ultimo svolge funzioni quali: la manipolazione di oggetti tramite pinze o mani antropomorfe, operazioni di saldatura, verniciatura e altre operazioni che spaziano dall'ambito medico a quello della simulazione di volo.

La **struttura fisica** del manipolatore può essere così riassunta:

- una base fissa connessa ad un
- end-effector tramite
- link, ovvero dei corpi rigidi che interconnessi per mezzo di
- giunti, i quali permettono il movimento dell'intera struttura.

A seconda della loro realizzazione meccanica possono imprimere ai link diversi movimenti che possono essere di tipo traslatorio o rotazionale.

Ogni link è caratterizzato da un numero di **gradi di libertà** pari a quello del giunto ad esso connesso. I gradi di libertà di un sistema sono i parametri necessari a descrivere il moto dello stesso.

Un corpo rigido nello spazio ha, se non è soggetto a vincoli, sei gradi di libertà: tre sono legati alla possibilità di traslare nelle tre dimensioni spaziali, tre alla possibilità di ruotare attorno ai tre assi di una terna ortonormale solidale al corpo rigido. Il numero di gradi di libertà della struttura è equivalente al numero di coordinate libere relative agli attuatori.

2.1.1. Parametri di un manipolatore

- *Numero di assi* – sono necessari due assi per raggiungere qualsiasi punto nel piano, tre assi per raggiungere qualsiasi punto nello spazio. Per controllare l'orientazione dell'end-effector sono richiesti altri tre assi (yaw, pitch, and roll).
- *Gradi di libertà*
- *Spazio di lavoro* – la regione dello spazio che il robot può raggiungere.
- *Cinematica* – l'interconnessione di membri rigidi e giunti in un robot, che determina i possibili movimenti dello stesso.
- *Capacità di carico* – quanto peso un robot può sollevare.
- *Velocità* – quanto velocemente il robot può posizionare l'end-effector. Si può parlare di velocità angolare o lineare di ogni asse o di una velocità risultante data dal movimento contemporaneo lungo più assi.
- *Accelerazione* – Quanto velocemente un asse può variare la sua velocità.
- *Accuratezza* – quanto precisamente un robot può raggiungere la posizione stabilita. L'accuratezza può variare con velocità e posizione nello spazio di lavoro e carico.
- *Ripetibilità* – quanto precisamente un robot ritorna in una posizione programmata. Mentre l'accuratezza misura l'errore di volta in volta, la ripetibilità fornisce l'imprecisione che risulta ogni volta che il robot esegue la medesima operazione prestabilita.

2.1.2. Indicatori di un manipolatore

- *Controllo di movimento* – per alcune operazioni è sufficiente garantire buona ripetibilità per un numero limitato di posizioni prestabilite (pick-and-place assembly), per operazioni più complesse è necessario un controllo continuo di orientazione e velocità (verniciatura).
- *Attuatori* – possono essere utilizzati attuatori elettrici o idraulici. I primi sono più veloci, mentre i secondi sono più resistenti e vantaggiosi in alcune applicazioni.
- *Drives* – alcuni connettono motori elettrici ai giunti tramite ingranaggi, altri in modo diretto.
- *Conformità* – misura angolare o lineare di quanto si sposta un asse se sottoposto all'azione di una forza. Questo può provocare degli errori di posizionamento che possono essere ridotti diminuendo l'accelerazione.

2.2. Manipolatori seriali e paralleli

Esistono due tipi di catene cinematiche, aperte o chiuse: si parla di catene cinematiche aperte se il primo e l'ultimo link non sono connessi, in caso contrario si parla di catene cinematiche chiuse.

Questa prima distinzione ne determina un'altra nei manipolatori, infatti: le catene cinematiche aperte definiscono manipolatori seriali, mentre quelle chiuse caratterizzano i manipolatori paralleli.

Un manipolatore seriale è costituito da una struttura portante che permette il posizionamento dell'organo terminale, un polso che permette di dare all'organo terminale un opportuno orientamento e l'organo terminale stesso, cioè l'utensile che serve per eseguire il compito.

Un manipolatore parallelo è composto da un basamento, dove tipicamente trovano spazio gli attuatori, collegato alla piattaforma che supporta gli organi terminali tramite catene cinematiche dette gambe. A loro volta queste sono costituite da membri collegati da coppie cinematiche, attuate e non: vengono progettate in modo tale da garantire alla piattaforma il voluto numero di gradi di libertà.

2.2.1. Robot seriali

- struttura semplice a livello costruttivo
- modularità
- ampio spazio di lavoro per l'end-effector
- cinematica computazionalmente semplice da implementare al calcolatore
- limitata capacità di carico
- frequenze naturali piuttosto basse
- grandi masse in movimento con conseguente riduzione delle accelerazioni
- precisione limitata



Figura 2.1

*Esempio pratico di un
manipolatore seriale*

2.2.2. Robot paralleli

- maggiore robustezza dal punto di vista meccanico
- alte capacità di carico e accelerazioni
- frequenze naturali elevate
- altissima precisione
- complessità di progettazione ed elaborazione computazionale
- limitato spazio di lavoro
- presenza di configurazioni singolari all'interno dello spazio di lavoro

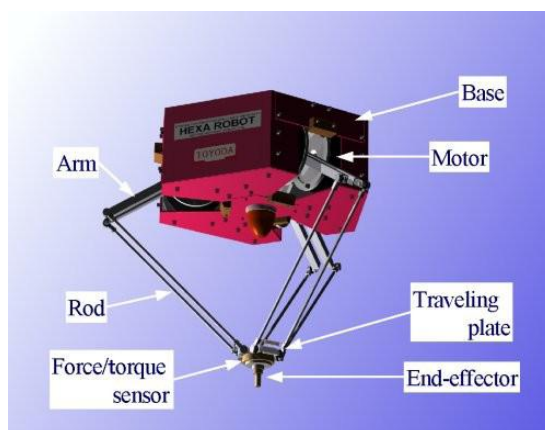


Figura 2.3

**Esempio pratico di un
manipolatore parallelo**

2.3. Perché preferire i manipolatori paralleli

Le macchine parallele, proprio a causa della particolare natura della loro struttura cinematica, possiedono molti vantaggi rispetto alle strutture seriali.

Innanzitutto l'elevata capacità di carico, che deriva dalla possibilità di suddividere le forze esterne tra tutte le gambe che supportano la piattaforma. Per lo stesso motivo si può anche parlare di rigidzze e frequenze naturali elevate: infatti le sollecitazioni in flessione dei sotto-sistemi sono assai ridotte, sia perché le articolazioni impongono quasi unicamente forze normali, sia perché gli sbracci sono molti piccoli, per cui questi arti possono essere a loro volta dimensionati in modo relativamente leggero.

Inoltre anche la possibilità di posizionare gli attuatori sul telaio contribuisce decisamente ad alleggerire la struttura della macchina e ad avere basse masse in movimento. Ciò porta alla possibilità di ottenere elevate accelerazioni per il dispositivo terminale. L'accuratezza ottenibile è molto elevata, sia per le caratteristiche dinamiche sia perché gli errori sui vari assi non si sommano tra loro come per le strutture seriali ma in modo più mediato.

Pertanto la buona precisione di posizionamento deriva anche dalle ridotte flessioni, le quali hanno sempre forti ripercussioni sugli errori e non sono misurabili. Anche dal punto di vista della costruzione meccanica si hanno notevoli vantaggi in quanto questa è relativamente semplice e soprattutto modulare, anche se le precisioni richieste sono sempre elevate e la progettazione risulta, invece, notevolmente complessa. Passando ad evidenziare gli svantaggi, sicuramente il maggiore di essi è dato dallo spazio di lavoro solitamente limitato in estensione, caratterizzato da bassa destrezza e da una geometria molto complessa che rende poi difficile la programmazione dei compiti, spesso anche a causa della presenza di punti singolari all'interno dello spazio stesso. Inoltre un altro svantaggio rilevante è dato dalla complessità delle equazioni della cinematica diretta che comporta delle difficoltà in fase di progettazione e in fase di realizzazione del sistema di controllo. Nel primo caso occorre effettivamente ricavare le relazioni cinematiche in forma esplicita, nel secondo si deve garantire l'esecuzione di un gran numero di calcoli in un tempo molto breve.

Infine, si evidenzia una certa sensibilità agli effetti termici, la cui influenza diventa ovviamente più rilevante nel caso di macchine parallele utilizzate per applicazioni di precisione.

L'elevata rigidezza assicura minime deformazioni dei membri e ciò contribuisce sicuramente all'accuratezza di posizionamento del manipolatore.

La possibilità di posizionare i motori sulla base, in alcuni prototipi, permette di alleggerire la struttura e quindi di incrementare le velocità e le accelerazioni.

2.4. Problemi progettuali

- *Relazioni cinematiche.* La cinematica diretta per un manipolatore parallelo risulta in genere più complessa di quella dei manipolatori seriali poiché la formulazione delle condizioni cinematiche necessarie genera equazioni non lineari che presentano soluzioni multiple. Un'altra limitazione nell'uso dei manipolatori paralleli è costituita dalla presenza di configurazioni singolari, che possono esistere anche all'interno dello spazio di lavoro.

- *Spazi di lavoro.* Lo spazio di lavoro relativamente limitato costituisce un problema pratico e di notevole interesse perché esso determina i limiti di lavoro e, conseguentemente, le possibili applicazioni.

Altri svantaggi rispetto ai manipolatori seriali sono da imputare alla complessa relazione tra lo spazio di lavoro di posizione e quello di orientazione, per cui l'analisi cinematica risulta più difficile da risolvere.

- *Pianificazione della traiettoria:* Questo problema è correlato a quello dello spazio di lavoro e, anche se si presenta in fase di programmazione, deve essere affrontato in fase di progetto prevedendo la disponibilità per l'operatore di idonei strumenti di supporto. Per macchine ridondanti può essere utilizzato il grado di libertà in eccesso per garantire la fattibilità della traiettoria assegnata o per poter superare le eventuali singolarità.

- *Controllori:* le elevate velocità ed accelerazioni raggiungibili da queste macchine dal punto di vista meccanico possono essere efficacemente sfruttate solo se la macchina risulta controllata da sistemi particolarmente sofisticati in grado di compensare almeno parzialmente i pesanti effetti dinamici indotti dal moto.

- *Calibrazione:* Un importante punto di forza delle macchine a cinematica parallela diventa un grosso problema nelle relazioni inverse utilizzate dagli algoritmi di calibrazione, infatti errori elevati sui giunti si traducono in errori moderati sulla posizione ed orientamento della piattaforma. Inoltre si ha una notevole sensibilità del processo di calibrazione nei confronti degli errori di misura.

- *Analisi delle prestazioni* . Le prestazioni delle macchine a cinematica parallela sono fortemente dipendenti dalle dimensioni del robot e dalla sua posa corrente. Per esempio, la rigidità di un manipolatore è molto diversa se valutata in pose differenti, così come è molto sensibile alla geometria del robot, anche a parità di architettura e di spazio di lavoro. Sono necessari strumenti di simulazione molto potenti per poter risolvere già in fase di progettazione i problemi più complessi.

Rispetto ai robot seriali la posizione dell' elemento terminale è meno sensibile agli errori dei sensori nei giunti.

Queste differenti caratteristiche hanno fatto sì che le due famiglie di robot fossero impiegate in ambiti diversi. I manipolatori seriali sono stati massicciamente utilizzati in campo manifatturiero (soprattutto automobilistico) come saldatrici, verniciatrici e assemblatrici nelle catene di montaggio, compiendo movimenti ripetitivi in uno spazio di lavoro strutturato e definito.

Le macchine parallele sono state invece impiegate come simulatori di volo, macchine di packaging veloce per la loro grande capacità di sopportare pesi grazie alla possibilità di scaricare le forze su più attuatori, dispositivi di puntamento, robot per la micromanipolazione o per applicazioni chirurgiche in quanto dotati di straordinarie precisioni raggiungibili.

CAPITOLO 3

MANIPOLATORI 3-RRR

3.1. Struttura dei manipolatori

Precedentemente è stata brevemente descritta la struttura fisica di un manipolatore industriale; vediamo ora le caratteristiche e tipologie di ciascun componente:

3.1.1. Descrizione dei giunti

- *Rotoidale*: E' un accoppiamento cinematico che presenta un grado di libertà e garantisce la rotazione intorno ad un solo asse (cardine della porta).

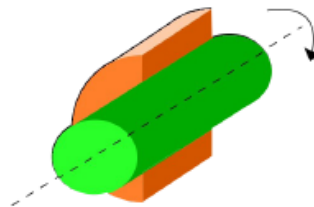


Figura 3.1. Giunto Rotoidale.

- *Prismatico*: E' un accoppiamento cinematico che presenta un grado di libertà e garantisce la traslazione lungo un solo asse (cilindri idraulici e pneumatici).

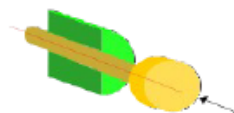


Figura 3.2. Giunto Prismatico.

- *Cilindrico*: E' un accoppiamento cinematico che presenta due gradi di libert  e garantisce la rotazione intorno ad un solo asse e la traslazione lungo lo stesso.

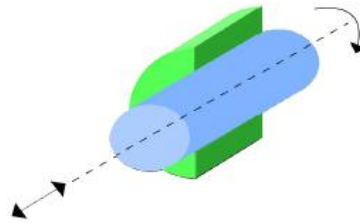


Figura 3.3. Giunto Cilindrico.

- *Elicoidale*: E' un accoppiamento cinematico che presenta un grado di libert  e garantisce la traslazione lungo un asse grazie alla filettatura del giunto stesso.

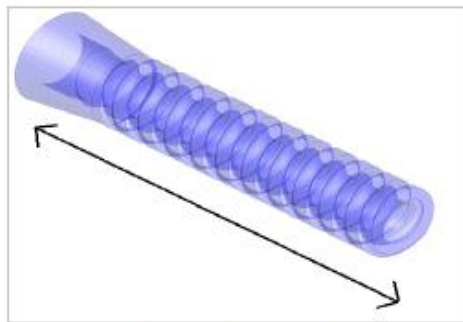


Figura 3.4. Giunto Elicoidale.

- *Sferico*: E' un accoppiamento cinematico che presenta tre gradi di libert . Garantisce la rotazione intorno a tre assi.

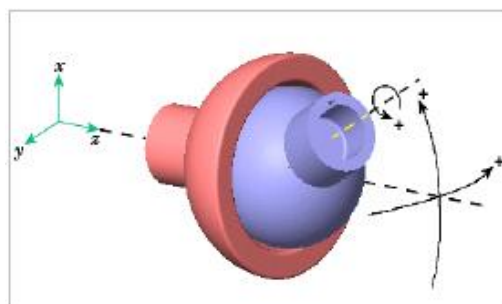


Figura 3.5. Giunto Sferico.

- *Universale*: E' un accoppiamento cinematico che presenta due gradi di libertà ed è costituito da due accoppiamenti rotoidali posti perpendicolarmente.



Figura 3.6. Giunto Universale.

3.1.2. Tipi di end-effector

Esistono diversi tipi di end-effector:

- Pinze
- Mani
- Dispositivi di presa
- Utensili

ognuno in grado di svolgere un preciso tipo di attività.

3.1.3. Gli attuatori

Sono di tre tipi:

- I sistemi pneumatici sono adoperati nel 30 % dei robot industriali. Hanno il vantaggio d'essere economici, affidabili, puliti, però sono voluminosi e difficili da controllare in velocità e in posizione.
- I sistemi elettrici sono adoperati nel 20% circa dei robot industriali. Hanno il vantaggio di essere facilmente controllabili in velocità e in posizione ed hanno un ingombro discreto. Non sono utilizzati in ambienti dove c'è rischio di esplosioni o incendi.
- I sistemi idraulici sono quelli più adoperati nei robot industriali, perché permettono di trasmettere forze più elevate con volumi limitati. Sono facilmente controllabili sia in velocità che in accelerazione, grazie all'impiego di valvole e servo-valvole. Però hanno lo svantaggio d'essere molto

costosi e complessi soprattutto all'inizio dell'azionamento, dove sono presenti molti dispositivi come elettrovalvole, serbatoi, accumulatori e filtri.

Le reti di alimentazione sono soggette a picchi d'energia, dannosi per i macchinari se non si prendono le opportune precauzioni. Nei sistemi pneumatici e idraulici s'inserisce un accumulatore in grado di immagazzinare e distribuire queste eccedenze d'energia; nei sistemi elettrici, dove non è possibile accumulare i picchi di energia, si devono sovradimensionare i dispositivi con conseguente aumento dei prezzi delle apparecchiature, in modo da essere in grado di sopportare i picchi che si prevede si verifichino.

3.2. 3-RRR

L'orientazione di un corpo rigido nello spazio è un compito di manipolazione che spesso si incontrano nelle applicazioni industriali: richiede solo 3 gradi di libertà (dof).

I manipolatori paralleli a 3 gradi di libertà fanno parte di una ben più ampia famiglia (detta LM-PMs) che raccoglie quei meccanismi (multi-loop) con meno di 6 dof. Questo tipo di manipolatori ha attirato l'attenzione sia delle ricerche accademiche che industriali dalla prima apparizione del robot DELTA (Clavel 1988).

L'esempio Di DELTA (4-DOF) mostrò che quando lo scopo del manipolatore richiede meno di 6 gradi di libertà, l'uso di un LM-PMs può portare alcuni vantaggi (architettura semplice della macchina, velocità, ecc.) che si aggiungono alle già numerose qualità dei manipolatori paralleli (PMs): elevata rigidità, buona precisione nel posizionamento.

Esempi di applicazioni che richiederebbero meno di 6 gradi di libertà sono: moto planare, moto traslatorio e moto sferico; ma queste non sono richieste in ambito industriale. Ciascuno dei tipi di moto sopra elencati genera una classe di LM-PMs: ad oggi ci sono quindi moltissime varietà di manipolatori paralleli planari (PPMs), di traslazione (TPMs) e sferici (SPMS).

Di Gregorio ha proposto una dettagliata suddivisione dei manipolatori a ridotto numero di gradi di libertà, sia in base al tipo di moto che al tipo di struttura; ciascuna delle sotto categorie dei LM-PMs può essere a sua volta divisa in due classi: sovravincolati e non-sovravincolati.

Manipolatori appartenenti alla prima classe sono macchine il cui numero di gradi di libertà è superiore a quello calcolato se i vincoli dovuti alle articolazioni fossero

indipendenti. Un manipolatore sovravincolato LP-PM può essere ottenuto utilizzando, come bracci, un numero, n , di catene cinematiche seriali con lo stesso numero di gradi di libertà del manipolatore stesso (LM-PM), a condizione che n sia il numero di gradi di libertà del manipolatore e gli arti siano tali da garantire un insieme non vuoto, W , tra gli n set, W_{ij} , $j=1, \dots, n$.

Questo principio ha guidato la progettazione di molti manipolatori del tipo LM-PM sovravincolati, tra cui il più noto è certamente il 3-RRR di pura rotazione (in inglese Wrist) (Gosselin e Angeles 1989) che sarà oggetto di questa trattazione; questo usa, come bracci, tre catene cinematiche di pura rotazione del tipo RRR con moto sferico intorno allo stesso punto.

Il vantaggio di puro movimento LMPM ottenuto usando il principio sopra descritto è che questi hanno tutti gli attuatori localizzati sul telaio, il che permette la realizzazione di manipolatori veloci. Questo però comporta un ridotto spazio di lavoro e con un'architettura che necessita di molta precisione nella produzione molto per evitare forzature delle articolazioni ed elevati carichi interni ai link.

Come già anticipato qui si tratterà un manipolatore parallelo (PW) a 3-dof di pura rotazione (3RRR), chiamato Agile Eye (figura 3.7), che può essere semplificato proprio con la struttura proposta da Gosselin ed Angeles nel 1989.

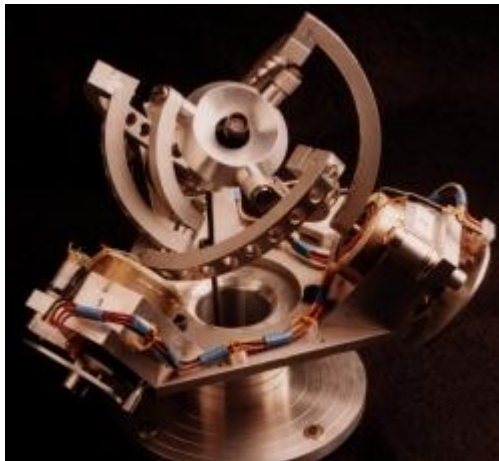


Figura 3.7 – Esempio applicativo di un manipolatore 3RRR: Agile eye

Avremo quindi una struttura in cui l'end-effector (o piattaforma) è collegato al telaio (base) da 3 catene cinematiche realizzate per mezzo di tre giunti del tipo rotoidale, i cui assi di rotazione si intersecano in un unico punto (detto P). Come già detto, caratteristica di questa struttura è che tutti i link (bracci della catena cinematica) sono

costretti a compiere un movimento sferico intorno allo stesso centro, ovvero lo stesso punto P (come si vede in figura 3.8): questo comportamento si riscontra in tutti i manipolatori di pura rotazione.

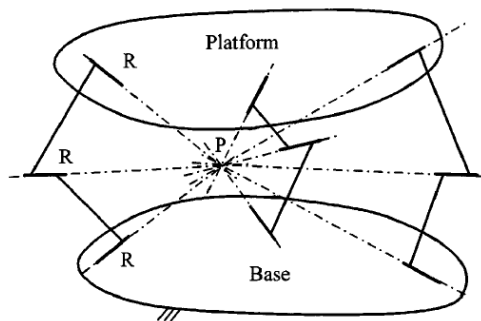


Figura 3.8 – Esempio di un manipolatore di pura rotazione del tipo 3-RRR.

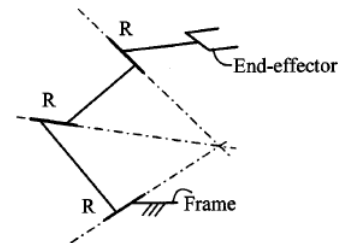


Figura 3.9 – Particolare della catena cinematica

Nella figura 3.9 si vede il particolare della catena cinematica che costituisce uno dei tre bracci del manipolatore.

CAPITOLO 4

ANALISI DINAMICA

4.1. Introduzione

Recenti progressi ci permettono di generare le equazioni dinamiche di robot in modo efficiente. Tuttavia, la progettazione di un robot non è un processo semplice, a causa dell'elevata non linearità e gli accoppiamenti dinamici della struttura. Abbiamo bisogno di un modo di rappresentare la struttura del manipolatore e la sua dinamica in modo che possano essere facilmente comprensibili per il progettista e in modo che le modifiche strutturali necessarie per migliorare la dinamica del braccio siano evidenti.

È possibile effettuare valutazioni dei diversi progetti per mezzo di tecniche di simulazione che forniscono strumenti sintetici per confrontare le prestazioni dinamiche di architetture differenti.

Tali strumenti sintetici sarebbero di grande utilità nel processo di progettazione e per questo sono accolti molto favorevolmente.

Uno svantaggio della maggior parte delle attuali tecniche di simulazioni però è che, poiché i modelli dinamici contengono così tante variabili e parametri dipendenti dalla configurazione, è difficile rappresentare la dinamica del braccio in un modo che sia facilmente comprensibile.

Il comportamento dinamico di un manipolatore parallelo (PM) è stato studiato da diversi autori; la maggior parte di questi studi sono dedicati ai manipolatori a 6 DOF (DW 14-20) ed pochi ancora a particolari manipolatori 3 DOF (DW 3,12-13): alcuni di essi sono basati sulle formulazioni di Newton-Eulero o su Lagrange o su altri come Baiges e Duffy (1996), Tsai (2000), Wang e Gosselin (1998). Tutti questi studi hanno mostrato che il comportamento dinamico dei manipolatori dipende dalla loro matrice **di inerzia generalizzata (GIM)** (Angeles, 1997): si tratta di una matrice $n \times n$ simmetrica (dove n è il numero di gradi di libertà del manipolatore in oggetto) e positiva che può essere ottenuta attraverso l'espressione analitica dell'energia cinetica del manipolatore. La

GIM dipende dalla configurazione del manipolatore e dagli autovalori, che sono numeri reali e positivi.

Un'interpretazione geometrica della GIM, per fornire uno strumento utile per una valutazione, è rappresentata dal concetto di **GIE (Generalized Inertia Ellipsoid)** presentato da Asada nel 1983. La forma del GIE dipende dalla configurazione del manipolatore; si tratta dunque di uno strumento utile al fine di rappresentare le caratteristiche dinamiche, e quindi del comportamento, di un braccio (manipolatore) meccanico.

La GIE di un manipolatore a n-dof è un ellissoide generalizzato con n assi principali le cui semi lunghezze sono i reciproci delle radici quadrate degli autovalori della GIM.

Le configurazioni in cui il GIE ha la forma di una sfera (vale a dire che gli autovalori della GIM sono tutti uguali) sono chiamate configurazioni **dinamicamente isotrope**. Quando un manipolatore assume tale configurazione, **qualsiasi modifica venga apportata al suo stato di moto, l'intensità delle forze d'inerzia risulta essere indipendente o quasi da qualsiasi cambiamento**: pertanto l'isotropia dinamica, prima proprietà del manipolatore, è una qualità ricercata durante la progettazione.

Il GIE può essere rappresentato graficamente solo se il manipolatore ha un numero di gradi di libertà inferiore o uguale a 3.

Un'altra proprietà è lo **'Swiftness'** del manipolatore, ossia la **capacità del manipolatore di provocare elevate accelerazioni dell'end-effector attraverso variazioni delle forze attive**.

Questa proprietà è solitamente indicata dalla massima accelerazione che l'attuatore può fornire. Tuttavia, tale massima accelerazione non tiene conto del comportamento del manipolatore in tutta la sua area di lavoro.

Nel 1989 Wiens, Scott e Zarrugh hanno proposto due indici che caratterizzano le forze non lineari che agiscono sul manipolatore, mentre Yoshikawa (1989) ha presentato un ellissoide, con riferimento alla GIM, di manipolabilità dinamica ed un indice per le misure di manipolabilità; un limite di questo approccio sta nel fatto che richiede la conoscenza di forze gravitazionali e non lineari al fine di definire la massima forza virtuale che è necessaria per valutare tale indice.

In questo elaborato verranno persi in considerazione gli indici presentati Di Gregorio e Parenti-Castelli nel 2002.

Questi autori hanno proposto tre indici per caratterizzare il comportamento dinamico dei manipolatori a 3 DOF a partire da una particolare espressione della GIM del manipolatore che è stata chiamata matrice di inerzia generalizzata riferita all'end-effector (GIMRE): il primo è legato all'isotropia dinamica e gli altri due prendono in considerazione la tendenza del manipolatore ad accelerare il suo end-effector, ne misurano quindi lo *Swiftness*.

Si ricordi che il modello si basa sulla formulazione lagrangiana della dinamica e consiste in un sistema di tre equazioni semplificate ottenute sfruttando il fatto che tutti i link ruotano intorno allo stesso punto fisso. In particolare sono stati usati tre i parametri che individuano l'orientamento piattaforma come coordinate generalizzate nel modello. Questa scelta consente l'utilizzo del GIM indicato nel modello per calcolare gli indici proposti.

4.2. Il Modello Dinamico

4.2.1. Sistemi di riferimento

La figura mostra un manipolatore di pura rotazione i cui link sono obbligati a realizzare movimenti sferici intorno allo stesso centro P , che è fisso per tutti i link. Tenendo come riferimento la figura, dove n è il numero di bracci: r_i , $i=1, \dots, n$, è il numero di link appartenenti all' i -esimo braccio; il link ij con $i=1, \dots, n$ e $j=1, \dots, r_i$, è il j -esimo link per l' i -esimo braccio. S_p è un sistema di riferimento fissato alla piattaforma e con origine in P ; S_b è un sistema di riferimento cartesiano fisso alla base con origine in P . Con riferimento alla figura, si definisce anche il sistema di riferimento cartesiano S_{ij} fisso al link ij con centro in P .

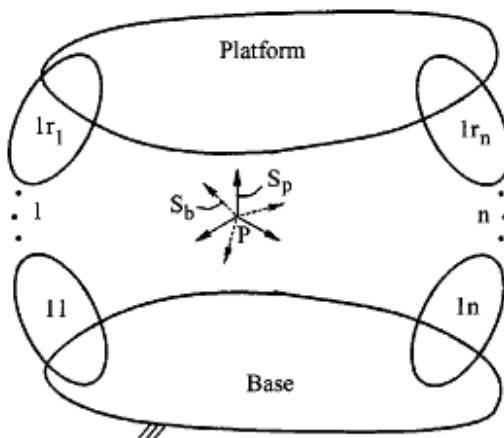


Fig. 3 Notations

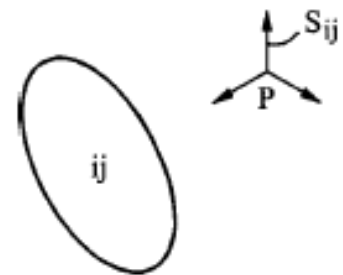


Figura 4.2 – particolare del link ij e il sistema di riferimento ad esso legato.

Figura 4.1 - Rappresentazione di un manipolatore composto da una piattaforma connessa alla base ferma a telaio da n catene cinematiche costituite da r link.

Inoltre si possono definire il tensore di inerzia ${}^iI_{ij}$ (pI_p) del link ij (della piattaforma) riferita al punto P e misurato in S_{ij} (S_p) e ${}^bI_{ij}$ (bI_p) e lo stesso tensore misurato in S_b . questi tensori sono legati tra loro dalle relazioni:

$${}^bI_{ij} = {}^bR_{ij} {}^iI_{ij} {}^bR_{ij}^T \quad (4.1)$$

$${}^bI_p = {}^bR_p {}^pI_p {}^bR_p^T \quad (4.2)$$

dove ${}^bR_{ij}$ (bR_p) e la matrice di rotazione che trasforma le componenti del vettore misurato in S_{ij} (S_p) nelle componenti del vettore misurato in S_b . Da qui in poi, tre parametri q_k , con $k=1, 2, 3$, che parametrizzano l' orientamento della piattaforma, verranno scelti come coordinate del manipolatore (wrist).

Con queste notazioni può essere definita l'energia cinetica.

4.2.2. Energia Cinetica

L'energia cinetica di un ij, E_{ij} , e della piattaforma, E_p , può essere scritta con riferimento al punto fisso P e il sistema di riferimento S_b come segue:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \omega_{ij}^T {}^bI_{ij} \omega_{ij} \quad (4.3)$$

$$E_p = \frac{1}{2} \omega_p^T {}^bI_p \omega_p \quad (4.4)$$

dove ω_{ij} e ω_p sono le velocità angolari del link ij e della piattaforma, rispettivamente misurate in S_b e l'apice T indica la trasposizione di ciò a cui fa riferimento.

L'energia cinetica del manipolatore invece è data dalla relazione:

$$E = E_p + \sum_{i=1,n} \sum_{j=1,r_i} E_{ij} \quad (4.5)$$

L'analisi cinematica del manipolatore ci da:

$$\omega_{ij} = H_{ij} \dot{q} \quad (4.6)$$

$$\omega_p = H_p \dot{q}$$

dove \mathbf{H}_{ij} e \mathbf{H}_p sono matrici, dipendenti da q_k , $k=1, 2, 3$, che possono essere calcolati, per esempio, differenziando rispetto al tempo le equazioni di chiusura del manipolatore; $\dot{\mathbf{q}}$ è la derivata rispetto al tempo del vettore $\mathbf{q}=(q_1, q_2, q_3)^T$ le cui componenti sono coordinate generalizzate.

Si ottiene quindi:

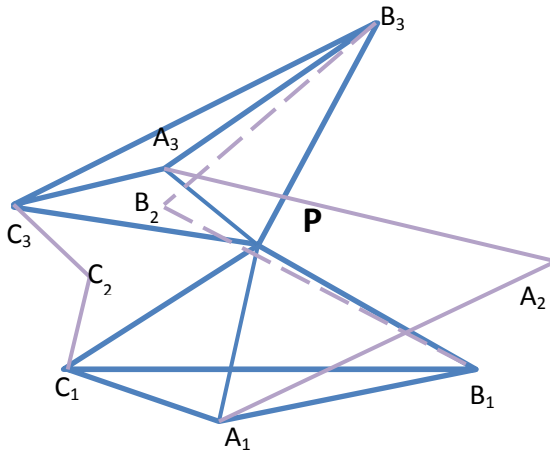
$$E = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{N} \dot{\mathbf{q}} \quad (4.7)$$

dove

$$\mathbf{N} = \mathbf{H}_p^T {}^b\mathbf{I}_p \mathbf{H}_p + \sum_{i=1,n} \sum_{j=1,r_i} \mathbf{H}_{ij}^T {}^b\mathbf{I}_{ij} \mathbf{H}_{ij} \quad (4.8)$$

la matrice \mathbf{N} è un' espressione della GIM del manipolatore di pura rotazione riferito all'end-effector (GIMRE). Questa espressione è stata usata da Parenti e Castelli [] per definire gli indici di prestazione che verranno calcolati più avanti. Si noti che la matrice \mathbf{N} dipende solo da \mathbf{q} (vettore coordinate generalizzate).

4.3. Il Calcolo della matrice N



4.3 – Rappresentazione semplificata della struttura del manipolatore.

La figura rappresenta una semplificazione della struttura del manipolatore analizzato che consiste in due piramidi equilateri, in cui gli spigoli sono inclinati di 30° rispetto al piano orizzontale e si incontrano nel punto P: gli spigoli di questa piramide rappresentano gli assi di rotazione dei link $i1$ e $i2$, dove $i=A,B,C$ e $i1$ sono link collegati alla base e $i2$ sono i link connessi alla piattaforma mobile.

- il triangolo $A_1 B_1 C_1$ rappresenta la base fissa a telaio
- il triangolo $A_3 B_3 C_3$ la base mobile dopo aver effettuato uno spostamento, questi punti vengono trovati attraverso delle matrici di rotazione che sono oggetto dell'analisi cinematica di posizione, che non verrà affrontata in questo scritto.

Sia la base, che la piattaforma sono semplificate attraverso due triangoli equilateri, quindi gli interni di questi sono tutti uguali e pari a 60° .

Si ipotizzino di lunghezza uguale i link che costituiscono il braccio i -esimo (ad esempio $A_1 A_2$ e $A_2 A_3$).

- \mathbf{H}_p :
come scritto precedentemente nella (4.6)

$$\boldsymbol{\omega}_p = \mathbf{H}_p \dot{\mathbf{q}}$$

quindi \mathbf{H}_p è la matrice Jacobiana che moltiplicata per il vettore velocità delle coordinate libere da' come risultato la velocità angolare della piattaforma; risulta quindi che

$$\mathbf{H}_p = \mathbf{J}_q^{-1} \mathbf{J}_x = \mathbf{J}$$

- \mathbf{H}_{ij} :
si consideri nuovamente quanto scritto nelle (4.6)

$$\boldsymbol{\omega}_{ij} = \mathbf{H}_{ij} \dot{\mathbf{q}}$$

\mathbf{H}_{ij} è quella matrice $n \times n$ che moltiplicata per il vettore delle velocità delle coordinate libere da' l'espressione della velocità angolare dei link.

Per semplificare questo passaggio, consideriamo separatamente le matrici \mathbf{H}_{i1} , \mathbf{H}_{i2} , poiché i procedimenti sono molto diversi sia dal punto di vista della modalità che difficoltà di formulazione.

4.3.1 Procedimento geometrico per il calcolo della matrice \mathbf{H}_p

Come visto precedentemente la matrice \mathbf{H}_p corrisponde alla matrice Jacobiana, si procede quindi a calcolarla, riprendendo anche alcuni concetti di analisi cinematica inversa di velocità.

In questo caso risulta più conveniente utilizzare un sistema di riferimento ruotato in modo tale che l'asse delle x risulti solidale allo spigolo della piramide fissa alla base: per ottenere ciò per ogni braccio si impone una rotazione di 90° intorno all'asse delle z e una di 120° intorno all'asse delle x .

Per trovare la velocità angolare degli attuatori, data quella della piattaforma, è necessario conoscere la velocità tangenziale: la direzione di quest'ultima è perpendicolare alla retta di minima distanza tra i vertici della piattaforma e gli spigoli della piramide ferma a telaio (AP, BP, CP).

Si scrivono innanzitutto i versori delle rette AP, BP e CP:

$$\begin{aligned} u_A &= \frac{A}{|A|} \\ u_b &= \frac{B}{|B|} \\ u_C &= \frac{C}{|C|} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Ipotizzando che la piattaforma abbia compiuto un movimento e che la nuova posizione sia A'_3, B'_3, C'_3 ; nel nuovo sistema di riferimento i punti diventeranno A''_3, B''_3, C''_3 , le cui proiezioni sul piano xy saranno $A''_{3p}, B''_{3p}, C''_{3p}$. La distanza da questi ultimi da P rappresenta il modulo di minima distanza che può essere espresso rispettivamente: $|A''_{3p}|, |B''_{3p}|$ e $|C''_{3p}|$.

A questo punto si possono definire i rispettivi versori dei moduli di minima distanza:

$$\begin{aligned} u_{A''_{3p}} &= \frac{A''_{3p}}{|A''_{3p}|} \\ u_{B''_{3p}} &= \frac{B''_{3p}}{|B''_{3p}|} \\ u_{C''_{3p}} &= \frac{C''_{3p}}{|C''_{3p}|} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Questi versori appena calcolati possono essere riportati al sistema di riferimento di partenza attraverso le matrici di rotazione:

$$\begin{aligned} u_{A'_{3p}} &= TA \cdot u_{A''_{3p}} \\ u_{B'_{3p}} &= TB \cdot u_{B''_{3p}} \\ u_{C'_{3p}} &= TC \cdot u_{C''_{3p}} \end{aligned} \quad (4.11)$$

A questo punto si trovano i versori in direzione perpendicolare sia al modulo di minima distanza e alla retta di rotazione del link alla base:

$$\begin{aligned}
 u_{A_s} &= u_{A'_{3p}} \times u_A \\
 u_{B_s} &= u_{B'_{3p}} \times u_B \\
 u_{C_s} &= u_{C'_{3p}} \times u_C
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

La velocità tangenziale v della piattaforma si calcola tramite il prodotto vettoriale tra la velocità angolare ω ed il braccio (distanza dall'origine): la direzione è perpendicolare al braccio e può essere scomposta nelle tre componenti lungo gli assi x , y e z .

Una volta trovata la velocità tangenziale viene riportata in direzione perpendicolare alla retta di minima distanza moltiplicandola per il rispettivo vettore (u_{A_s} , u_{B_s} , u_{C_s}) e dividendola per il modulo di minima distanza, si ottiene la matrice Jacobiana.

$$J = \begin{bmatrix} v_{A_x} \cdot \frac{u_{A_s}}{|A'_{3p}|} & v_{A_y} \cdot \frac{u_{A_s}}{|A'_{3p}|} & v_{A_z} \cdot \frac{u_{A_s}}{|A'_{3p}|} \\ v_{B_x} \cdot \frac{u_{B_s}}{|B'_{3p}|} & v_{B_y} \cdot \frac{u_{B_s}}{|B'_{3p}|} & v_{B_z} \cdot \frac{u_{B_s}}{|B'_{3p}|} \\ v_{C_x} \cdot \frac{u_{C_s}}{|C'_{3p}|} & v_{C_y} \cdot \frac{u_{C_s}}{|C'_{3p}|} & v_{C_z} \cdot \frac{u_{C_s}}{|C'_{3p}|} \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

Dove v_{ix} , v_{iy} , v_{iz} sono le velocità tangenziali di ogni punto scomposte lungo le tre direzioni.

Si ricordi che $v = \omega \times \vec{r}$, dove \vec{r} è il braccio.

4.3.2. Procedimento geometrico per il calcolo delle H_{ij}

Per il calcolo di queste matrici si userà i sistemi di riferimento rappresentati in figura 4.4, ciascuno solidale al singolo link ij : i link $i1$, connessi alla base, ruotano intorno al proprio asse y , mentre i link $i2$, connessi alla piattaforma, ruotano intorno al proprio asse x .

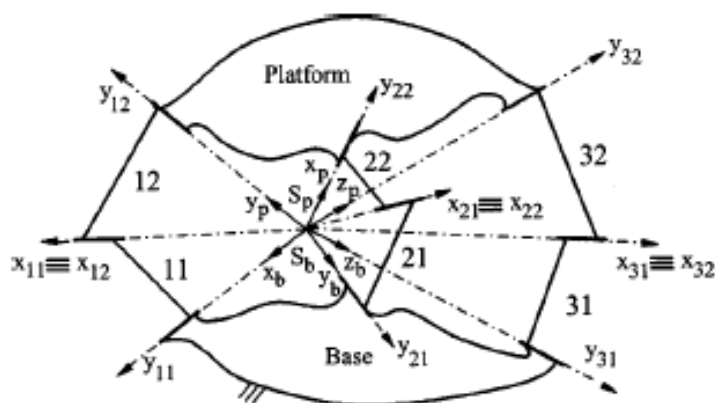


Figura 4.4 – i tre sistemi di riferimento a confronto riferiti alla base, alla piattaforma e ai link ij

- H_{i1}

Dalla (4.6) sappiamo che questa matrice moltiplicata per il vettore della velocità delle coordinate libere dà la velocità angolare dei link $i-1$, quindi dei bracci direttamente connessi alla base:

$$\omega_{ij} = H_{ij} \dot{q}$$

Ma essendo queste velocità pari alla velocità delle coordinate libere stesse, risulterà che:

$$H_{A1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

$$H_{B1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H_{A1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le tre matrici si esprimono in questo modo poiché, secondo il sistema di riferimento usato (figura 4.4), la rotazione dei link $i1$ avviene intorno all'asse y .

- **H_{i2}**

La determinazione di questa matrice è meno immediata rispetto alle due precedenti: i link i-2, infatti, risentono sia dell'influenza del movimento trasmesso dalla base, sia dello spostamento della piattaforma.

Per calcolare la matrice si parte quindi dalle velocità tangenziali del link i2: si deve determinare il versore, che identifichi la componente tangenziale della velocità, come si è fatto per determinare la matrice jacobiana nel paragrafo precedente.

Osservando il disegno della struttura si può notare come la velocità tangenziale risulti essere ortogonale alle due rette che congiungono: la prima il punto P con i punti A₂, B₂, C₂, la seconda il punto P con A₃, B₃, C₃, si procederà quindi a calcolare il prodotto vettoriale:

$$\begin{aligned}\bar{v}_{A3} &= \overline{PA}_2 \times \overline{PA}_3 \\ \bar{v}_{B3} &= \overline{PB}_2 \times \overline{PB}_3 \\ \bar{v}_{C3} &= \overline{PC}_2 \times \overline{PC}_3\end{aligned}\tag{4.15}$$

poi si troverà il versore indicante la direzione dividendo il vettore appena trovato per il suo modulo.

$$\begin{aligned}u_{vA3} &= \frac{\bar{v}_{A3}}{|\bar{v}_{A3}|} \\ u_{vB3} &= \frac{\bar{v}_{B3}}{|\bar{v}_{B3}|} \\ u_{vC3} &= \frac{\bar{v}_{C3}}{|\bar{v}_{C3}|}\end{aligned}\tag{4.16}$$

Quelli appena definiti sono i versori che identificano la direzione della velocità del braccio i-2.

A questo punto è possibile costruire la matrice **H_{i2}** in questo modo:

$$\mathbf{H}_{A2} = \begin{bmatrix} v_{Ax} \frac{u_{vA3}}{PA_3} & v_{Ay} \frac{u_{vA3}}{PA_3} & v_{Az} \frac{u_{vA3}}{PA_3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\tag{4.17}$$

$$\mathbf{H}_{B2} = \begin{bmatrix} v_{Bx} \frac{u_{vB3}}{PB_3} & v_{By} \frac{u_{vB3}}{PB_3} & v_{Bz} \frac{u_{vB3}}{PB_3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_{C2} = \begin{bmatrix} v_{Cx} \frac{u_{vC3}}{PC_3} & v_{Cy} \frac{u_{vC3}}{PC_3} & v_{Cz} \frac{u_{vC3}}{PC_3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dove v_{ix} , v_{iy} , v_{iz} sono le velocità tangenziali dei punti della piattaforma scomposte lungo i tre assi x , y , z .

4.3.3. Matrici inerziali

Definire gli effetti inerziali risulta essenziale poiché dalla distribuzione delle masse dipendono proprietà geometriche e cinematiche dei sistemi meccanici; una volta note queste proprietà si avrà facilmente una visione completa della dinamica del sistema.

Come già visto all' inizio del capitolo, (4.1) e (4.2), i possono definire i tensori di inerzia:

$${}^b\mathbf{I}_{ij} = {}^b\mathbf{R}_{ij} {}^{ij}\mathbf{I}_{ij} {}^b\mathbf{R}_{ij}^T$$

$${}^b\mathbf{I}_p = {}^b\mathbf{R}_p {}^p\mathbf{I}_p {}^b\mathbf{R}_p^T$$

dove le matrici ${}^{ij}\mathbf{I}_{ij}$, che esprimono i tensori di inerzia del link ij , ci vengono fornite direttamente da Di Gregorio e Perenti-Castelli [2], e sono state definite attraverso un sistema di riferimento direttamente connesso al link ij esimo come si vede in figura (4.4): per quanto riguarda i link $i1$, l'asse delle y (intorno al quale avviene la rotazione) sarà la retta passante per P e A_1

I tensori di inerzia così misurati, data la massa $m_{ij}=0.1$ Kg , sono:

$${}^{ij}I_{i1} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.1 & 0.05 \\ 0.1 & 0.5 & 0.05 \\ 0.05 & 0.05 & 0.25 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

$${}^{ij}I_{i2} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Inoltre i valori dei parametri inerziali sono stati calcolati sulla base delle coordinate dei centri di massa, nel sistema di riferimento fissato sul link ij.

Per quanto riguarda piattaforma, anche il tensore di inerzia di questo ci viene fornito direttamente da di Gregorio e Perenti-Castelli [2], calcolato sapendo che la massa della piattaforma è pari a 0.25 Kg, sulla base del sistema di riferimento fissato alla piattaforma e risulta essere:

$${}^pI_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

A questo punto si devono definire le matrici di rotazione per riportare quanto calcolato nei diversi sistemi di riferimento, al sistema di riferimento con centro in P solidale alla base del manipolatore.

Sapendo che le matrici di rotazione intorno ai singoli assi per la piattaforma sono:

$$\begin{aligned} R_x(\gamma) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) \\ 0 & \sin(\gamma) & \cos(\gamma) \end{bmatrix} \\ R_y(\beta) &= \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} \\ R_z(\alpha) &= \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Dove gli angoli α , β e γ sono una terna di angoli che esprimo la rotazione della della piattaforma rispettivamente intorno agli assi z, y e x.

La matrice di rotazione che riporta il tensore d'inerzia calcolato nel sistema di riferimento della piattaforma, secondo Cardano, a quello della base è uguale al prodotto delle tre matrici appena riportate, quindi risulta uguale a:

$${}^b\mathbf{R}_p = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & -\sin \alpha \cos \gamma + \sin \gamma \cos \alpha \sin \beta & \sin \alpha \sin \gamma + \cos \gamma \sin \beta \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \gamma + \sin \gamma \sin \beta \sin \alpha & -\sin \gamma \cos \alpha + \sin \alpha \cos \gamma \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \sin \gamma & \cos \beta \cos \gamma \end{bmatrix}$$

(4.22)

Mentre l'altra matrice ${}^b\mathbf{R}_{ij}$ va calcolata singolarmente per ciascun link, moltiplicando le matrici che esprimono la singola rotazione intorno a ciascun asse: per fare questo può risultare utile la figura 4.5.

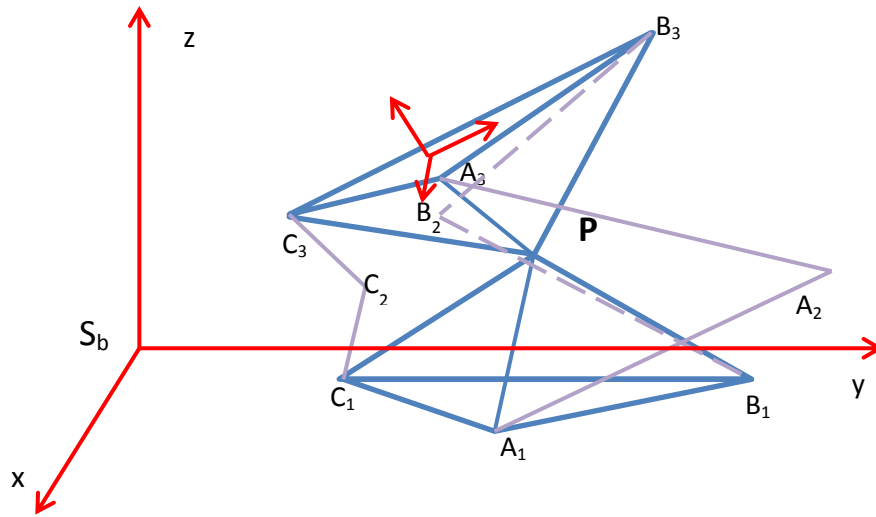


Figura 4.5

A questo punto abbiamo tutti i dati necessari al calcolo della matrice \mathbf{N} come è stata definita all'inizio del capitolo (4.8):

$$\mathbf{N} = \mathbf{H}_p^T {}^b\mathbf{I}_p \mathbf{H}_p + \sum_{i=1,n} \sum_{j=1,r_i} \mathbf{H}_{ij}^T {}^b\mathbf{I}_{ij} \mathbf{H}_{ij}$$

4.4. INDICI DINAMICI

Il comportamento dinamico di un manipolatore dipende dai valori assunti dai tre autovalori della matrice **N**. Gli autovalori della matrice **N** sono le tre soluzioni della seguente equazione

$$\det(\mathbf{N} - x\mathbf{I}_3) = 0 \quad (4.23)$$

dove $\det(\cdot)$ è il determinante di (\cdot) , x è l'incognita e \mathbf{I}_3 è la matrice identica 3x3.

Risolvendo la parte sinistra dell'equazione e ricordando la relazione tra i coefficienti di una equazione cubica e le sue soluzioni, possono essere facilmente dimostrate le seguenti relazioni tra gli elementi della matrice **N** e i suoi autovalori, x_1 , x_2 , e x_3 (reali e positivi):

$$\text{tr}(\mathbf{N}) = x_1 + x_2 + x_3 \quad (4.24)$$

$$\det(\mathbf{N}) = x_1 x_2 x_3 \quad (4.25)$$

dove $\text{tr}(\mathbf{N})$ è la traccia della matrice **N** e $\det(\mathbf{N})$ il suo determinante, le cui forme esplicite possono essere direttamente ottenute dagli elementi stessi della matrice.

In questo paragrafo verranno presentati ed applicati tre indici definiti usando la sola somma o prodotto tra gli autovalori della matrice **N**. Per fare questo, senza perdita di generalità, gli autovalori della matrice verranno supposti ordinati in modo che la seguente disequazione sia rispettata:

$$0 < x_1 \leq x_2 \leq x_3 \quad (4.26)$$

4.4.1 Isotropia dinamica (primo indice)

La configurazione di un manipolatore a 3 gradi di libertà si definisce dinamicamente isotropica quando gli autovalori della matrice **N** in quella configurazione sono tutti uguali, in che implica la seguente relazione:

$$x_1 x_2 x_3 = \frac{(x_1 + x_2 + x_3)^3}{27} \quad (4.27)$$

infatti questa relazione viene rispettata solo se i tre autovalori sono uguali, poiché il prodotto di tre quantità scalari la cui somma è definita è massimo solo se questi sono tutti uguali.

Da qui si può definire il primo indice d_1 come segue:

$$d_1 = \frac{27(x_1 x_2 x_3)}{(x_1 + x_2 + x_3)^3} \quad (4.28)$$

dove, se $d_1=1$ la configurazione è isotropica, mentre per tutte le altre configurazioni vale $d_1 < 1$.

L'indice può essere definito anche con questa relazione:

$$d_1 = \frac{27(y_1 y_2)}{(y_1 + y_2 + 1)^3} \quad (4.29)$$

ottenuta moltiplicando e dividendo la parte destra dell'equazione per x_3^3 , infatti

$$y_1 = \frac{x_1}{x_3}, y_2 = \frac{x_2}{x_3} \quad (4.30)$$

Se si applica la disequazione (4.26) alle definizioni (4.30) si ottiene:

$$0 < y_1 \leq y_2 \leq 1$$

La variabile y_1 è il rapporto tra il minimo e il massimo autovalore; di conseguenza misura quanto la configurazione sia vicina all'isotropia.

Per studiare il grafico di d_1 come funzione di y_1 e y_2 , è necessario calcolare le derivate parziali dell'indice stesso rispetto, sia y_1 che y_2 , per poi analizzarne il segno:

$$\frac{\partial d_1}{\partial y_1} = \frac{27y_2(1 + y_2 - 2y_1)}{(y_1 + y_2 + 1)^4}$$

$$\frac{\partial d_1}{\partial y_2} = \frac{27y_1(1 + y_1 - 2y_2)}{(y_1 + y_2 + 1)^4}$$

(4.31)

Tenendo in considerazione la disequazione ricavata in precedenza, la prima espressione risulta sempre uguale a zero se $y_1 \neq y_2$: per cui d_1 ha lo stesso andamento di y_1 . Inoltre il sistema a due equazioni ottenuto ponendo uguale a zero quanto posto a destra delle due equazioni (4.31) ha come unica soluzione $y_1=y_2=1$. Da qui d_1 ha un unico massimo corrispondente a $y_1=y_2=1$.

Queste due proprietà di d_1 permette di utilizzare tale indice per misurare l'isotropia dinamica di una configurazione al posto di y_1 .

Tenendo conto della relazioni (4.23), la (4.26) diventa:

$$d_1 = 27 \frac{\det(\mathbf{N})}{[\text{tr}(\mathbf{N})]^3} \quad (4.32)$$

Questa espressione dell'indice d_1 contiene in forma esplicita i parametri inerziali e geometrici del manipolatore, ma anche le tre coordinate libere q_1 , q_2 e q_3 .

Dato che quest'indice è uguale a 1 solo in caso di configurazione isotropica, gli elementi della matrice \mathbf{N} corrispondenti ad una configurazione dinamicamente isotropica devono soddisfare la relazione:

$$27 \frac{\det(\mathbf{N})}{[\text{tr}(\mathbf{N})]^3} = 1 \quad (4.33)$$

Se i parametri inerziali e geometrici del manipolatore sono dati, tale relazione risulta scalare in tre incognite: le tre coordinate libere q_1 , q_2 e q_3 . Nello spazio di configurazione del manipolatore (spazio tridimensionale in cui le tre coordinate sono le coordinate libere del manipolatore), l'equazione (4.33) è l'espressione analitica della superficie che rappresenta il luogo geometrico dei punti corrispondenti alle configurazione dinamicamente isotrope.

D'altra parte, se i parametri inerziali e geometrici del manipolatore non fossero dati, questi potrebbero essere calcolati in modo tale che l'equazione (4.33) valga per qualunque terna di valori delle coordinate libere. Un manipolatore

dimensionato in questo modo sarà dinamicamente isotropo in tutto il suo spazio di lavoro.

4.4.2 Swiftness (secondo e terzo indice)

Come già definito all'inizio del capitolo lo swiftness è l'attitudine di un manipolatore a causare l'accelerazione dell'end-effector per la stessa variazione delle forze attive. Come l'accelerazione, lo swiftness dipende dalla configurazione del manipolatore. In particolare, maggiore è la media aritmetica degli autovalori x_1, x_2, x_3 della matrice \mathbf{N} corrispondenti alla configurazione del manipolatore, minore è l'accelerazione che l'end-effector può raggiungere partendo da questa stessa configurazione.

Definiamo quindi il secondo indice:

$$d_2 = \frac{3}{x_1 + x_2 + x_3} \quad (4.34)$$

che misura lo swiftness di un manipolatore in una data configurazione.

Riprendendo l'equazione (), l'indice può essere riscritto come:

$$d_2 = \frac{3}{tr(\mathbf{N})} \quad (4.35)$$

Quest'ultima espressione per l'indice d_2 contiene esplicitamente gli stessi parametri e coordinate generalizzate contenuti nell'espressione di d_1 .

Se i parametri inerziali e geometrici del manipolatori sono dati, la definizione sopra proposta di d_2 dipende solo dalle tre coordinte generalizzate, q_1, q_2 e q_3 . Inoltre, nello spazio di configurazione del manipolatore, il luogo geometrico dei punti corrispondenti alle configurazioni con lo stesso valore, d_{20} , dell'indice d_2 (con lo stesso swiftness) è una superficie la cui espressione analitica è:

$$\frac{3}{tr(\mathbf{N})} = d_{20} \quad (4.36)$$

Una misura dello swiftness medio di un manipolatore è il valore medio, d_{2m} (indice di swiftness medio), dell'indice d_2 su tutto lo spazio di lavoro utile. La definizione () permette di definire l'indice di swiftness medio come segue:

$$d_{2m} = \frac{\int_W \frac{3dw}{tr(N)}}{\int_W dw}$$

(4.38)

Dove W è la regione dello spazio di configurazione corrispondente allo spazio di lavoro utile del manipolatore.

L'indice di swiftness medio d_{2m} dipende solo dai parametri inerziali e geometrici del manipolatore e può essere usato per mettere a paragone manipolatori con architetture diverse. Inoltre, se i parametri di inerzia e geometrici del manipolatore non sono dati, questi possono essere determinati sfruttando la () in modo tale che il manipolatore abbia un dato valore medio dell'indice di swiftness d_{2m} .

CAPITOLO 5

APPLICAZIONE DEGLI INDICI DINAMICI

Gli indici d_1 , d_2 , e d_{2m} appena definiti, misurano la performance dinamica dei manipolatori a 3 gradi di libertà: in questo capitolo si vedrà l'applicazione di questi indici ad un manipolatore parallelo di tipo 3-RRR, già ampiamente descritto precedentemente. Questo permetterà di definire le configurazioni migliori che il manipolatore in questione può assumere per ottimizzare le due proprietà di isotropia e "swiftness".

L'applicazione è stata effettuata attraverso l'utilizzo del software MATLAB, che da come risultato il grafico degli indici in funzione della posizione della piattaforma mobile, facendola variare all'interno di una regione dello spazio da noi definita.

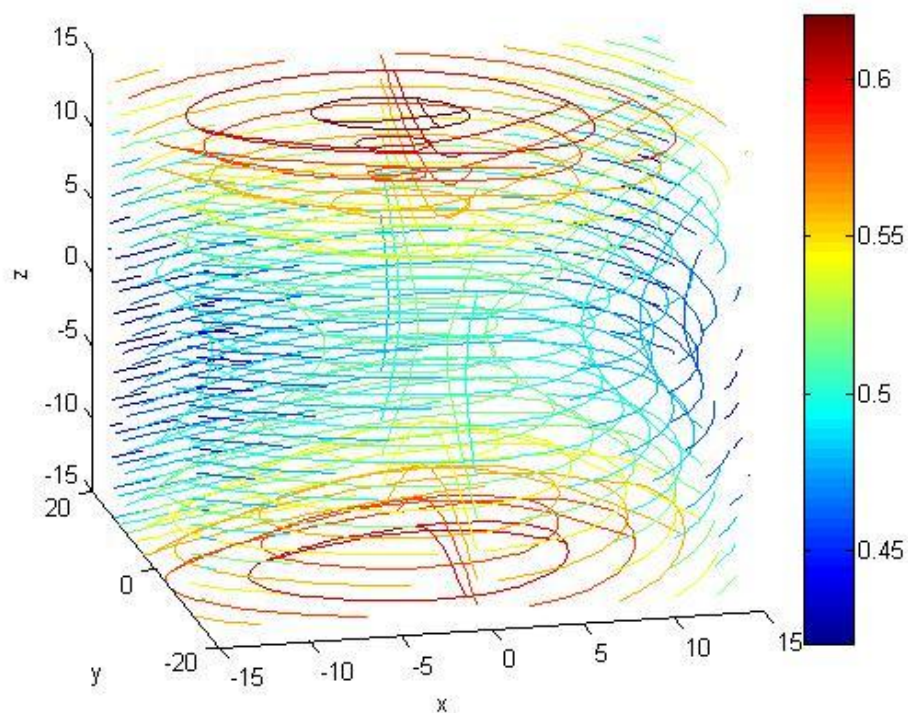
L'analisi è stata effettuata in due casi diversi in cui abbiamo variato la massa per visualizzare eventuali cambiamenti causati dai differenti effetti inerziali: dapprima con massa della piattaforma pari a 0.25 Kg e in seguito con massa pari a 0.5 Kg

5.1. INDICE 1

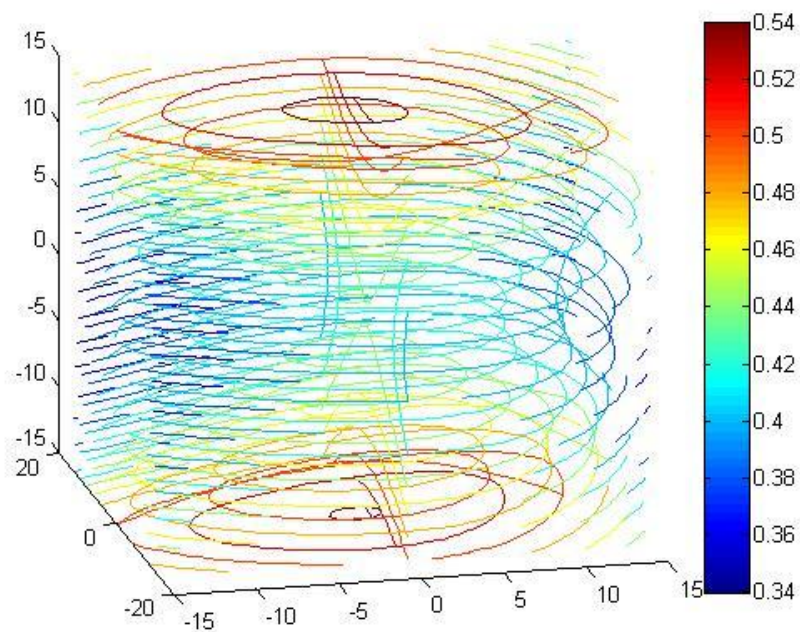
Come già detto in precedenza, questo primo indice permette di misurare l'isotropia dinamica del manipolatore: questo indice risulta essere uguale ad 1 se e solo se la configurazione è dinamicamente isotropica.

I grafici 5.1 e 5.2 mostrano l'andamento dell'indice, rispettivamente per massa della piattaforma pari a 0.25 Kg e 0.5 Kg; analizzandoli si intuisce che le configurazioni ottimali per ottenere migliore condizione di isotropia sia nella parte alta del grafico, e nella zona centrale dello spazio di lavoro, ovvero dove la curva assume il colore nero: questo vale per entrambi i casi studiati.

Nel secondo grafico si nota che la regione di spazio per cui si ha isotropia migliore è leggermente più ristretta e per valori più bassi di z : questo è imputabile all'aumento di massa della piattaforma.



*Grafico 5.1 – andamento dell'indice di isotropia dinamica
nel caso di una piattaforma con massa pari a 0.25 Kg.*



*Grafico 5.1 – andamento dell'indice di isotropia dinamica
nel caso di una piattaforma con massa pari a 0.5 Kg.*

5.2 INDICI 2 E 3

Come già definito in precedenza il secondo indice (d_2) misura la capacità di un manipolatore di poter accelerare il suo end-effector (nel nostro caso la piattaforma).

Si nota immediatamente nei grafici 5.3 e 5.4 che, per masse maggiori (5.4), i valori assunti da d_2 sono inferiori: è facilmente intuibile che un aumento di massa provochi una riduzione della capacità degli attuatori di accelerare la piattaforma stessa. Questa ipotesi è avvalsa dal calcolo del terzo indice, ovvero la media dei valori assunti da d_2 in tutto lo spazio di lavoro:

$$d_{2m}(m_p=0.5)=0.2906$$

$$d_{2m}(m_p=0.25)= 0.4869$$

si vede come, per masse inferiori, il valore dell'indice che misura lo swiftness aumenti.

Anche nel caso dell'analisi del grafico di questo secondo indice mostra, in accordo con quanto visto per il primo indice, che le configurazioni che garantiscono valori migliori per lo swiftness siano quelle centrali.

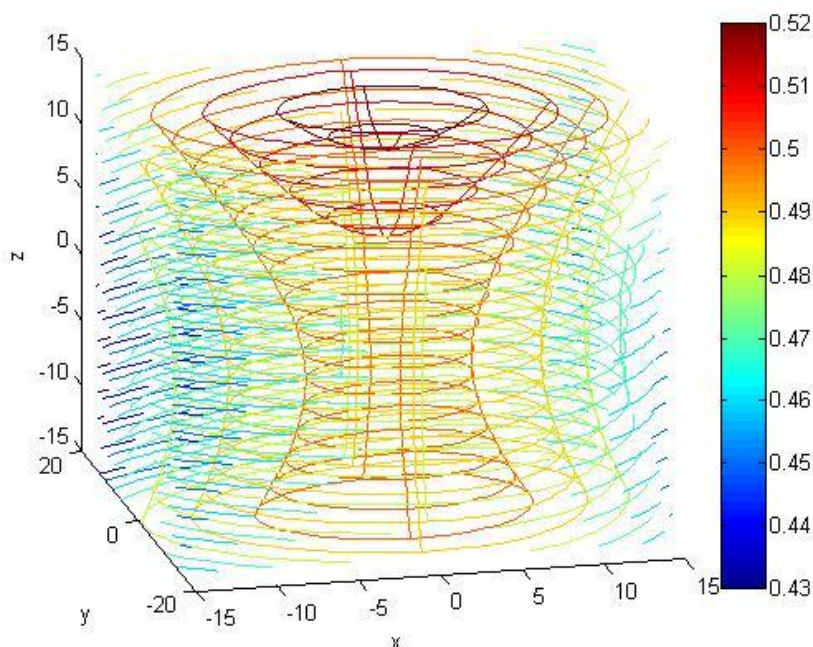


Figura 5.3 – grafico per l'indice d_2 nel caso la piattaforma abbia massa 0.25 Kg

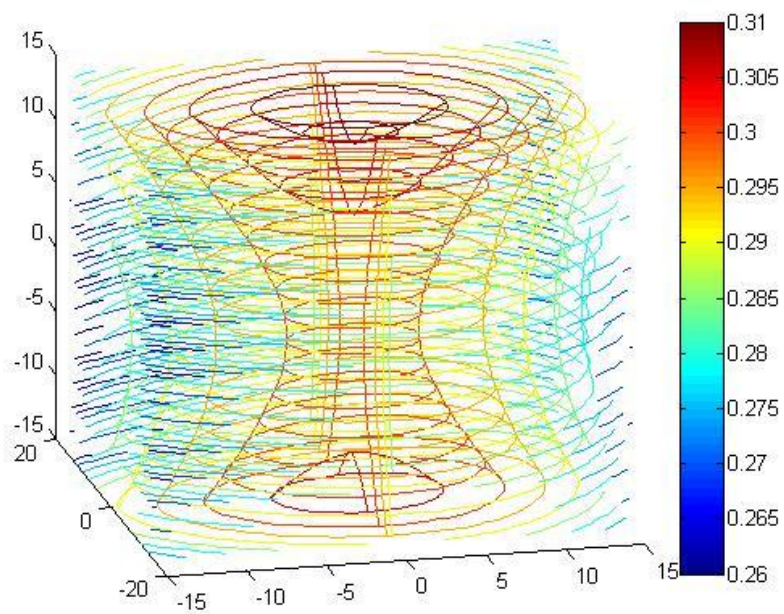


Figura 5.3 – grafico per l'indice d_2 nel caso la piattaforma abbia massa 0.5 Kg

CONCLUSIONI

In questo scritto abbiamo visto l'applicazione di un modello dinamico allo scopo di progettare al meglio un manipolatore 3-RRR, oltre alla definizione di utili indici dinamici sempre per fini progettuali.

Nei primi capitoli è stato introdotto il concetto di robot, la sua storia, e la definizione di manipolatori industriali nella loro distinzione in seriali e paralleli, le differenze strutturali e computazionali, oltre alle conseguenze nella progettazione.

Dopo aver definito il modello dinamico, si è passati alla sua applicazione al manipolatore 3-RRR proposto da Gosselin, di cui si aveva già l'analisi cinematica di posizione e velocità affrontata nella tesi di Martina Bozzolan.

Attraverso un rigoroso studio del moto del manipolatore, delle sue velocità e dei tensori di inerzia, con riferimento a sistemi di coordinate diverse e conseguentemente la determinazione delle matrici di rotazione, si è stati in grado di determinare la matrice **N** espressione della GIM del manipolatore di pura rotazione riferito all'end-effector (GIMRE). In seguito sono stati definiti tre indici dinamici ottenuti attraverso l'applicazione del modello stesso.

Infine, grazie all'implementazione con il software MATLAB, è stata definita la regione dello spazio di lavoro del manipolatore e i grafici delle funzioni che esprimono gli indici: in questo modo si sono definite le configurazioni migliori per ottenere un comportamento isotropo del manipolatore e per migliorare la capacità di questo ad accelerare la piattaforma.

BIBLIOGRAFIA

1. Gosselin, C.M. St. Pierre, E. Gagne, M. 1996. *On the Development of the Agile Eye*, IEEE Robotics & Automation Magazine.
2. R.Di Gregorio, V. Parenti-Castelli, *Dynamics of a Class of Parallel Wrist*, ASME Journal of Mechanical design.
3. R. Di Gregorio, V. Parenti Castelli, *Dynamic performance indices for 3-DOF parallel manipulators*.
4. Wiens, G.J., Scott, R.A., and Zarrugh, M.Y. (1989), *The role of inertia sensitivity in the evaluation of manipulator performance*, ASME Journal of Mechanical Design.
5. Di Gregorio, R., and Parenti-Castelli, V., 2002, "Dynamic Performance Characterization of Three-dof Parallel Manipulators," *Advances in Robot Kinematics: Theory and Applications*, J. Lenarcic and F. Thomas, eds., Kluwer Academic Publishers, Netherlands, pp. 11–20.
6. Raffaele di Gregorio, "Parallel Manipulators with Lower Mobility"
7. Gosselin, C.M. Angeles, J. 1989. The Optimum Kinematic Design of a Spherical Three-Degree-of-Freedom Parallel Manipulator, ASME J. Mech. Transm. Autom. Design, Vol. 111, 202-207.
8. Asada, H., 1983, "A Geometrical Representation of Manipulator Dynamics and Its Applications to Arm Design," ASME J. Dyn. Syst., Meas., Control, **105**(3), pp. 131–1
9. Massimo Callegari, Considerazioni sulla progettazione delle macchine a cinematica parallela, Progettare (VNU), N°247, Luglio-Agosto 2001.

10. Dispense del corso di FONDAMENTI DI MECCANICA (Giulio Rosati), *Matrici di rotazione e notazioni*.
11. Dispense del corso di MECCANICA (Giulio Rosati), *Matrici di rototraslazione*.
12. Dispense del corso di MECCANICA (Giulio Rosati), *Richiami di Algebra Lineare*
13. Erik Peruzzi, 2009, *Modellistica e progettazione di un manipolatore parallelo a tre gradi di libertà*.
14. L.W. Tsai, Robot analysis: The Mechanics of serial and parallel manipulators, New York:Wiley, 1999.
15. Martina Bozzolan, Analisi cinematica di un manipolatore parallelo di pura rotazione (3-RRR), Tesi di laurea
16. Chiara Carone, Analisi e applicazione di indici dinamici per manipolatori paralleli, Tesi di laurea
17. <http://www.wikipedia.org>

RINGRAZIAMENTI

Ci sono stati dei momenti in cui ho pensato che questo momento non sarebbe mai arrivato per colpa di ostacoli che mi sembravano insormontabili, ma alla fine, oggi, posso dirmi orgogliosa di questo primo traguardo nella mia carriera universitaria; devo però ringraziare le persone che mi sono state accanto nei più svariati modi.

Il primo ringraziamento va alla mia famiglia: ai miei genitori, per sostenermi sempre, non solo economicamente, ma anche moralmente e per non avermi preso per pazza quando gli dissi la prima volta che volevo laurearmi in ingegneria; a mia sorella per aver condiviso con me momenti di ordinaria follia negli ultimi 22 anni.

Sicuramente un grandissimo ringraziamento va al professor Giovanni Boschetti, per l'aiuto costante nella stesura della tesi, per la pazienza e la cortesia con cui mi ha seguito negli ultimi mesi.

Grazie ovviamente anche ai miei “colleghi ingegneri” di Padova, Verona e Venezia, sia che li conosca da pochi anni, oppure da una vita intera: per le bische clandestine, i gruppi studio, la pasta al tonno, i viaggi in treno, le risate, le tante pause caffè, i discorsi sensati e non, ma soprattutto per l'aiuto costante che, nei momenti difficili, non è mai mancato; non li nominerò tutti perché sono tanti e sicuramente dimenticherei qualcuno, ma grazie davvero.

Infine voglio ringraziare le persone che rappresentano per me una famiglia allargata, la mia forza, nonché, gli amici migliori che potessi desiderare, perché non mi hanno mai fatto sentire sola: Claudia, Denis, Alessio, Alessandro, Andrea (Lio) e Matteo (Maga); se è vero che gli amici sono i fratelli che ci scegliamo, ho scelto proprio bene!

APPENDICE

```
close all;
clear;

% per memorizzare i risultati
indice1=zeros(21,21,21);
indice2=zeros(21,21,21);
indice3=0;
indice3cont=0;

%per il grafico
[X,Y,Z]=meshgrid(-15:1:15,-15:1:15,-15:1:15);

% costanti:
alpha=pi/180*0;
beta=pi/180*0;
gamma=pi/180*30;

r=200;
h=r*tan(30*pi/180);
L=r/cos(30*pi/180);

P=[0,0,0];

%coordinate della base
A1=[r,0,-h,1];
B1=[-r/2,sqrt(3)/2*r,-h,1];
C1=[-r/2,-sqrt(3)/2*r,-h,1];

%coordinate della piattaforma
A3=[r,0,h,1]';
B3=[-r/2,sqrt(3)/2*r,h,1]';
C3=[-r/2,-sqrt(3)/2*r,h,1]';

for i = -15:1:15
    ii=i+16;
    for j = -15:1:15
        jj=j+16;
        for k = -15:1:15
            kk=k+16;

% analisi di posizione
alpha = pi/180*k;
beta = pi/180*j;
gamma = pi/180*i;

A31=Rz(alpha)*Ry(beta)*Rx(gamma)*A3;
B31=Rz(alpha)*Ry(beta)*Rx(gamma)*B3;
C31=Rz(alpha)*Ry(beta)*Rx(gamma)*C3;

L1=sqrt( (A31(1)-A1(1))^2 + (A31(2)-A1(2))^2 + (A31(3)-A1(3))^2 );
```



```

L2=sqrt( (B31(1)-B1(1))^2 + (B31(2)-B1(2))^2 + (B31(3)-B1(3))^2 );
L3=sqrt( (C31(1)-C1(1))^2 + (C31(2)-C1(2))^2 + (C31(3)-C1(3))^2 );

delta=pi/180*120;
epsilon1=pi/180*(0+90);
epsilon2=pi/180*(120+90);
epsilon3=pi/180*(-120+90);

TA = Rz(epsilon1)*Rx(delta);
TB = Rz(epsilon2)*Rx(delta);
TC = Rz(epsilon3)*Rx(delta);

A32= TA'*A31;
psil=atan2(A32(2),A32(1));

B32= TB'*B31;
psi2=atan2(B32(2),B32(1));

C32= TC'*C31;
psi3=atan2(C32(2),C32(1));

Pint=[L,0,0,1]';

theta1=psil - pi/2;
theta2=psi2 - pi/2;
theta3=psi3 - pi/2;

A2 = TA * Pint;
B2 = TB * Pint;
C2 = TC * Pint;

%analisi di velocità

omegax=[1,0,0];
omegay=[0,1,0];
omegaz=[0,0,1];

uA3=A31/norm(A31);
uB3=B31/norm(B31);
uC3=C31/norm(C31);

A32p=A32(1:3);
A32p(3)=0;

mA32=norm(A32p); %modulo minima distanza

uA32p=A32p/mA32;

uA32p(4)=1;

uA3p=TA*uA32p; %direzione minima distanza

uA=A1(1:3)/norm(A1(1:3)); %asse di rotazione

uAS=cross(uA3p(1:3),uA); %direzione veloc rispetto all'asse A

```

```

B32p=B32(1:3);
B32p(3)=0;

mB32=norm(B32p); %modulo minima distanza

uB32=B32p/mB32;

uB32(4)=1;

uB32x=TB*uB32; %direzione minima distanza

uB=B1(1:3)/norm(B1(1:3)); %asse di rotazione

uBS=cross(uB32x(1:3),uB);

C32p=C32(1:3);
C32p(3)=0;

mC32 = norm(C32p); % modulo minima distanza

uC32 = C32p/mC32;

uC32(4)=1;

uC32x = TC*uC32 ; % direzione minima distanza

uC = C1(1:3)/norm(C1(1:3)); % asse di rotazione

uCS=cross(uC32x(1:3),uC); % direzione velocità rispetto all'asse A

% matrice jacobiana J
J(1,1) = cross(omegax,A31(1:3))*uAS'/mA32 ;
J(1,2) = cross(omegay,A31(1:3))*uAS'/mA32 ;
J(1,3) = cross(omegaz,A31(1:3))*uAS'/mA32 ;

J(2,1) = cross(omegax,B31(1:3))*uBS'/mB32 ;
J(2,2) = cross(omegay,B31(1:3))*uBS'/mB32 ;
J(2,3) = cross(omegaz,B31(1:3))*uBS'/mB32 ;

J(3,1) = cross(omegax,C31(1:3))*uCS'/mC32 ;
J(3,2) = cross(omegay,C31(1:3))*uCS'/mC32 ;
J(3,3) = cross(omegaz,C31(1:3))*uCS'/mC32 ;

thetalp= sqrt(J(1,1)^2+J(1,2)^2+J(1,3)^2);
theta2p= sqrt(J(2,1)^2+J(2,2)^2+J(2,3)^2);
theta3p= sqrt(J(3,1)^2+J(3,2)^2+J(3,3)^2);

%Hi j

%Hi1
HA1=[0,0,0; 1, 0, 0; 0, 0, 0];
HB1=[0,0,0; 0, 1, 0; 0, 0, 0];
HC1=[0,0,0; 0, 0, 1; 0, 0, 0];

%Hi3

```

```

HA3=[J(1,1),J(1,2),J(1,3)];
HB3=[J(2,1),J(2,2),J(2,3)];
HC3=[J(3,1),J(3,2),J(3,3)];

%Hi2

VAp=cross(A2(1:3),A31(1:3));
VBp=cross(B2(1:3),B31(1:3));
VCp=cross(C2(1:3),C31(1:3));

uvA3=VAp/(norm(VAp));
uvB3=VBp/(norm(VBp));
uvC3=VCp/(norm(VCp));

J2(1,1)=(cross(omegax,A31(1:3))*(uvA3/(norm(A31))));
J2(1,2)=(cross(omegay,A31(1:3))*(uvA3/(norm(A31))));
J2(1,3)=(cross(omegaz,A31(1:3))*(uvA3/(norm(A31))));

J2(2,1)=(cross(omegax,B31(1:3))*(uvB3/(norm(B31))));
J2(2,2)=(cross(omegay,B31(1:3))*(uvB3/(norm(B31))));
J2(2,3)=(cross(omegaz,B31(1:3))*(uvB3/(norm(B31))));

J2(3,1)=(cross(omegax,C31(1:3))*(uvC3/(norm(C31))));
J2(3,2)=(cross(omegay,C31(1:3))*(uvC3/(norm(C31))));
J2(3,3)=(cross(omegaz,C31(1:3))*(uvC3/(norm(C31))));

HA2=[ J2(1,1), J2(1,2), J2(1,3); 0, 0, 0; 0, 0, 0];
HB2=[ J2(2,1), J2(2,2), J2(2,3); 0, 0, 0; 0, 0, 0];
HC2=[ J2(3,1), J2(3,2), J2(3,3); 0, 0, 0; 0, 0, 0];

%Hp
Hp=[J(1,1) J(1,2) J(1,3); J(2,1) J(2,2) J(2,3); J(3,1) J(3,2) J(3,3)];

% tensori di inerzia
mp=0.25;
Ip=[1 0 0; 0 1 0; 0 0 1];

m=0.1;
IA1=[0.25 0.1 0.05; 0.1 0.5 0.05; 0.05 0.1 0.25];
IA2=[0.25 0 0; 0 0.25 0; 0 0 0.25];

IB1=[0.25 0.1 0.05; 0.1 0.5 0.25; 0.05 0.1 0.25];
IB2=[0.25 0 0; 0 0.25 0; 0 0 0.25];

IC1=[0.25 0.1 0.05; 0.1 0.5 0.25; 0.05 0.1 0.25];
IC2=[0.25 0 0; 0 0.25 0; 0 0 0.25];

%matrici di rotazione
Rp=Rz2(alpha)*Ry2(beta)*Rx2(gamma);
delta2=pi/180*30;

```

```

RA1=Ry2(theta1)*Rx2(delta2);
RB1=Rz2(pi/180*120)*Ry2(theta2)*Rx2(delta2);
RC1=Rz2(pi/180*-120)*Ry2(theta3)*Rx2(delta2);

RA2=Rz2(alpha)*Ry2(beta)*Rx2(gamma);
RB2=Rz2(alpha+5/6*pi)*Ry2(beta)*Rx2(gamma);
RC2=Rz2(alpha+5/12*pi)*Ry2(beta)*Rx2(gamma);

%I*R
Ipb=Rp*Ip*Rp';
IA1b=RA1*IA1*RA1';
IA2b=RA2*IA2*RA2';
IB1b=RB1*IB1*RB1';
IB2b=RB2*IB2*RB2';
IC1b=RC1*IC1*RC1';
IC2b=RC2*IC2*RC2';

% matrice N
N = 0;
N = Hp'*Ipb*Hp;
N = N + (Hp'*HA1'*IA1b*HA1*Hp) + (Hp'*HB1'*IB1b*HB1*Hp) + (Hp'*HC1'*IC1b*HC1*Hp);
N = N + (HA2'*IA2b*HA2) + (HB2'*IB2b*HB2) + (HC2'*IC2b*HC2);

x=eig(N) ;

% indici:
d1=(27*x(1)*x(2)*x(3))/(x(1)+x(2)+x(3))^3 ;

d2=3/(x(1)+x(2)+x(3)) ;

indice1(ii,jj,kk)=d1;
indice2(ii,jj,kk)=d2;

indice3=indice3+d2;
indice3cont=indice3cont+1;

end
end
end
indice3 = indice3/indice3cont;

figure(1)
contourslice(X,Y,Z,indice1,0,0,-15:2:15);
colorbar;
view([-13,20]);

figure(3)
contourslice(X,Y,Z,indice2,0,0,-15:2:15);
colorbar;
view([-13,20]);

```